**Mục lục**

I. Ý tưởng phương pháp………………………………………………………………….2

II. Xây dựng thuật toán……………………………………………………………………2

1. Tìm trị riêng có modun lớn nhất ****............................................................. 2

* 1. Trường hợp trị riêng trội  thực, đơn( bội một)………………………... 3
  2. Trường hợp  bội r và thực……………………………………………… 4

1.3 Trường hợp  và  thực và trái dấu ………………………. 5

1.4 Trường hợp  và  là phức liên hợp……………………………………6

2. Phương pháp xuống thang để tìm trị riêng tiếp theo………………………10

III. Thuật toán……………………………………………………………………………...12

IV. Chương trình Matlab………………………………………………………………….14

V. Kết luận………………………………………………………………………………….15

***CHỦ ĐỀ 21: Tính gần đúng giá trị riêng trội***

***và giá trị riêng trội tiếp theo***

**I. Ý tưởng phương pháp**

PP Danilepski và pp A.N.Cơruôp là những phương pháp tìm trị riêng đúng( nếu nghiệm của phương trình đặc trưng được giải đúng). Với những phương trình đặc trưng giải nghiệm gần đúng thì ta cần đến phương pháp tìm các trị riêng và vectơ riêng gần đúng. Sau đây em xin giới thiệu về phương pháp lũy thừa ( tên gọi chính xác là PP Mises ) để tìm trị riêng gần đúng.

**II. Xây dựng thuật toán**

Giả sử xét ma trận A[aij] là ma trận đơn giản, nó là ma trận mà các phần tử aij (i,j=1,n) đều là thực và mỗi trị riêng bội k có đủ k vectơ riêng độc lập tuyến tính.

Như vậy, giả sử ma trận A cấp n có đủ n trị riêng thực hoặc phức ( đơn hoặc bội ) được đánh số theo modun giảm dần.



Các véctơ riêng tương ứng lần lượt là X1, X2, ...... Xn là hệ các véctơ độc lập tuyến tính.

Trong số các véctơ Y=  với Ci – const (**1**)

( là tổ hợp tuyến tính của hệ véctơ Xi, ) ta chọn véctơ nào có C1 # 0 và tính dãy :

AY = A

( vì AXi = )

A2Y=A=

.............................................

AmY = A(Am-1Y)=

( Hệ (**2**))

**1. Tìm trị riêng có modun lớn nhất** 

**1.1 Trường hợp trị riêng trội  thực, đơn( bội một)**

Giả sử trị riêng của ma trận A thỏa mãn điều kiện

 (**3**)

Từ hệ (2) ta có ( với C1 0)

AmY=C1. [ C1X1+ ] (**4**)

Do giả thiết (3) nên khi m thì)m 0 với k= và khi đó ta có :

 C1X1 (m )

Hay khi n đủ lớn thì AmY , đồng thời

Am+1Y =C1X1

Từ đó ta suy ra Am+1YAmY

Hay A(AmY)(AmY) (**5**)

Vậy   j= (**6**)

Đẳng thức (5) chứng tỏ AmY là véctơ riêng tương ứng với trị riêng  và  được tính theo tỉ số (6) ( là thành phần thứ j= của các vectơ AmY và Am+1Y) .

Vậy với giả thiết (3), ta chọn vectơ Y bất kì có C1 0, tính dãy AY,A2Y,....,Am+1Y, tính cho đến khi tỉ số (6) sấp sỉ bằng nhau, m đủ lớn, thì tìm được trị riêng trội là  của ma trận A. Khi đó các vectơ riêng tương ứng theo (5) ta có thể chọn là AmY hay Am+1Y đều được.

Ví dụ 1: Tìm trị riêng trội của ma trận A

A= 

Giải: Ta chọn vectơ riêng Y bất kì, ở đây lấy Y=(1,1,1)t. Ta tính được AY,A2Y,... được cho theo bảng sau :

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | Y | AY | A2Y | A3Y | A4Y | A5Y |
|  |  |  |  |  |  |  |

Ta thấy:

 =

Do đó ta có thể lấy  16.22 và vectơ riêng là vectơ A5Y. Các vectơ riêng khác nhau 1 hằng số nhân nên ta chọn vectơ riêng là X1=(1,2.081,2.497)t ( là vectơ A5Y sau khi đã chia tất cả cho thành phần thứ nhất là 585299).

**1.2 Trường hợp**  **bội r và thực**

Giả sử  thực và bội r

**(7)**

Theo (4) trong trường hợp này ta có

AmY=m (C1X1+ C2X2+..........CrXr) + Cr+1.Xr+1+......CnXn

Bằng cách lập luận như trên, với m đủ lớn ta có:

Am+1YAmY

hay A(AmY) AmY

  j= (**8**)

Trong quá trình tính AmY thấy các tỉ số (8) xấp xỉ bằng nhau thì dừng và lấy tỉ số đó làm xấp xỉ  đồng thời vectơ riêng tương ứng là AmY hoặc Am+1Y là 1 trong r vectơ độc lập tuyến tính ứng với .

**1.3 Trường hợp  và ** **thực và trái dấu **

Giả sử = và ||=||>||..........||

Trong trường hợp

AY= (C1X1 C2X2)+ C3X3 +........+ CnXn

A2Y=(C1AX1C2AX2)+ C3AX3 +.......+ CnAXn

=(C1X1+C2X2)+C3X3+.........+CnXn ( vì AX=X)

.....................................

A2k-1Y( C1X1C2X2) + CjXj

A2kY( C1X1C2X2) + CjXj

Lập luận như trên khi k đủ lớn ta có:

A2k-1Y=( C1X1C2X2)

A2kY( C1X1C2X2)

Và A2k+2Y(C1X1+C2X2) (**10**)

= . (C1X1+ C2X2)

Hay A2k+2Y=A2kY (**11**)

Hay   j= (**12**)

Trong quá trình tính các bước lũy thừa liền nhau các tỷ số các thành phần không có xu hướng gần nhau, nhưng ở các bước cùng chẵn hoặc cùng lẻ các tỉ số dạng (**12**) có xu hướng trùng nhau, tỉ số đó được xem là xấp xỉ của 

Để tìm vectơ riêng tương ứng:

Từ A2k-1Y ( C1X1C2X2)

A2kY( C1X1C2X2)

A2kY+A2k-1Y.2.C1X1 và A2kYA2k-1Y

Hay A(A2kY+ A2k-1Y).2C1AX1 = .2C1X1 = .()(A2kY+A2k-1Y)

Vậy với thì vectơ riêng tương ứng là

X1A2kY + A2k-1Y (**13**)

Còn với = thì vectơ riêng tương ứng là

X2A2kY A2k-1Y (**14**)

**1.4 Trường hợp**  **và**  **là phức liên hợp**

Giả sử = ( phức liên hợp) và

||=||>||..................|| (**15**)

Từ AmY=C1X1 + C2X2 + 

Theo giả thiết (**15**) và lập luận như trên

AmYC1+ C2

Am+1YC1 + C2

Am+2YC1 + C2 (**16**)

Từ (**16**)

* Am+2Y (+)Am+1Y + AmY = 0 (**17**)

Quá trình tính thấy tỉ số dạng (**8**) hoặc dạng (**12**) không thấy xảy ra, nhưng với m đủ lớn thì 3 phép tính liên tiếp có xu hướng là tổ hợp tuyến tính với nhau:

Am+2Y - pAm+1Y + qAmY = 0 (**18**)

Khi đó ta có +  = p ;  = q

Hay , là 2 nghiệm của phương trình

Z2 - pz +q = 0 (**19**)

Vậy lập được phương trình (19) thì ta giải ta sẽ được cặp nghiệm phức liên hợp , có modun trội.

Trong thực tế cần tìm phương trình (**19**) ta viết phương trình (**18**) trong dạng tọa độ:

(Am+2Y)j - p(Am+1Y)j + q(AmY)j = 0 j=

Lấy hai tọa độ bất kì, chẳng hạn j=r, j=s, (rs) ta được hai phương trình và ghép với phương trình (**19**) được hệ 3 phương trình

Z2 - p Z + q = 0

(Am+2Y)r - p(Am+1Y)r + q(AmY)r = 0

(Am+2Y)s - p(Am+1Y)s + q(AmY) = 0 với 3 ẩn là 1,p,q. (**20**)

Hệ trên là hệ thuần nhất nên để có nghiệm khác 0 thì định thức phải bằng 0

Det  = 0

Hay Det  = 0 (**21**)

Là phương tình dạng (**19**), giải t được cặp nghiệm phức liên hợp có modun trội.

Để tìm vectơ riêng từ (**16**) ta có

Am+1Y - AmY C2X2

Am+1Y - AmY C1X1

Do đó A(Am+1Y - AmY) ( Am+1Y - AmY)

A(Am+1 - AmY) ( Am+1Y- AmY)

Vậy ứng với  ta có vectơ riêng là Am+1Y - AmY (**22**)

Và ứng với  có vectơ riêng là Am+1Y - AmY.

Ví dụ : Xét ma trận

A = 

Giải: Chọn Y=(-1,1,0,0). Tính AmY thành bảng sau

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Y | -1 | 1 | 0 | 0 |
| AY | 3 | 2 | -1 | 1 |
| A2Y | -4 | -31 | -1 | -2 |
| A3Y | -26 | 189 | 38 | 5 |
| A4Y | -284 | -849 | -313 | -12 |
| A5Y | -1742 | 2907 | 1812 | 29 |
| A6Y | 8232 | -6023 | -8401 | -70 |
| A7Y | -30958 | -10567 | 31366 | 169 |
| A8Y | 82884 | 206471 | -83869 | -408 |
| A9Y | -43574 | -1443989 | 45952 | 985 |

Ma trận A có các trị riêng trội là phức liên hợp  và  chúng là nghiệm phương trình dạng (**19**) cụ thể là:

Det  = 0

Hay Z2+8,02Z+ 20,05=0

Ta tính ra Z= 4.011,99i

Vậy =4.011.99i, =1.01i

Sau khi tìm trị riêng và  ta có thể tìm các vectơ riêng tương ứng.

Dựa vào (21) ta có

Am+1Y - AmY C2()X1

Am+1Y -  AmYC1()X2

Do đó

A(Am+1Y - AmY) ( Am+1Y - AmY)

A(Am+1Y -  AmY) ( Am+1Y -  AmY)

Vậy Am+1Y - AmY là vectơ riêng ứng với 

Am+1Y -  AmY là vectơ riêng ứng với 

**2. Phương pháp xuống thang để tìm trị riêng tiếp theo**

Giả sử X1 là vec tơ riêng của ma trận Atương ứng với giá trị riêng λ1 và W1 là vec tơ riêng của ma trận ATtương ứng với giá trị riêng λ1. Từ định nghĩa AX1 = λ1X1ta viết:

(A - λE)X1 = 0

Ta tạo ma trận A1 dạng:

 **(23)**

Ta chú ý là X1W1T là một ma trận còn W1TX1 là một con số.Khi nhân hai vế của biểu thức **(23)** với X1 ta có:

 **(24)**

A1 chấp nhận giá trị riêng bằng không.

Nếu X2 là vec tơ riêng tương ứng với giá trị riêng λ2,thì khi nhân A1 với X2 ta có:

 **(25)**

Theo định nghĩa vì W1 là vectơ riêng của AT nên:

λ1W1 =ATW1 **(26)**

Mặt khác do:

(AX)T =XTAT và (AT)T = A

Nên khi chuyển vị **(26)** ta nhận được:

(ATW1)T = λ1W 1T

Hay:

W1TA = λ1W1T **(27)**

Khi nhân **(27)** với X2 ta có:

λ1W1TX2 = W1TAX2

AX2 = λ2X2

nên:

λ1W1TX2 = W1T λ2X2

Vậy thì:

(λ1 - λ2) W1TX2 = 0

Khi λ1 ≠ λ2 thì:

W1TX2 = 0 **(28)**

Cuối cùng thay **(28)** vào **(25)** ta có:

A1X2 = AX2 = λ2X2

Như vậy λ2 là giá trị riêng lớn nhất của ma trận A1 và như vậy có thể áp dụng thuật toán này để tìm các giá trị riêng còn lại của ma trận. Các bước tính toán như sau

- Khi đã có λ1 và X1 ta tìm W1 là vec tơ riêng của AT ứng với giá trị riêng λ1­ (ví dụ tìm W1 bằng cách giải phương trình (AT -λ1E)W1 = 0). Từ đó tính ma trận A1 theo **(23).**

- Tìm giá trị riêng và vec tơ riêng của A1 bằng cách lặp luỹ thừa và cứ thế tiếp tục và xuống thang (n-1) lần ta tìm đủ n giá trị riêng của ma trận A.

**Ví dụ**: Tìm giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận sau:



Ta đã tìm được giá trị riêng lớn nhất λ1 = 7 và một vectơ riêng tương ứng:

X1 = { 1, 1, 0, -2}T.

Ma trận AT có dạng:



và theo phương trình (AT -λ1E)W1 = 0 ta tìm được vectơ W1 = {293,695,746,434}T

Ta lập ma trận mới A1 theo (7):



và:



Từ ma trận A1 ta tìm tiếp được λ2 theo phép lặp luỹ thừa và sau đó lại tìm ma trận A3 và tìm giá trị riêng tương ứng.

**III. Thuật toán**

Input : ma trận vuông A cấp n, Y là vectơ bất kì,m là số lớn hơn 218, espi

Thuật toán :

**Bước 1:**

-Tính dãy các tỉ số  j=

-Nếu trong quá trình tính toán mà A^m.Y = 0 thì yêu cầu nhập lại vectơ Y

-Nếu abs( max -min) < thì lamda1 = max

Vectơ riêng tương ứng là : A^m.Y sau khi đã chia cho thành phần có modun lớn nhất

-Nếu abs(max -min) > thì tính dãy các tỉ số  j=

Khi đó nếu abs( max  min) <

lamda1= -lamda2= sqrt ( max )

Vectơ riêng tương ứng là :

X1A2kY + A2k-1Y

X2A2kY - A2k-1Y

**Còn lại**

Đặt c1 = (A^(m)\* Y), c2 = (A^(m + 1)\*Y,c3=(A^(m+2)\*Y)

a1 = c1(1,1)\*c2(2,1) - c1(2,1)\*c2(1,1)

a2 = c1(2,1)\*c3(1,1) - c1(1,1)\*c3(2,1)

a3 = c2(1,1)\*c3(2,1) - c2(2,1)\*c3(1,1)

Xét phương trình bậc 2 : a1 \* Z^2 – a2\*Z +a3 =0.(phương trình này có được sau khi thu gọn định thức (**21**)

Khi đó 2 trị riêng lamda1 và lamda2 là 2 nghiệm của phương trình trên. Các vectơ riêng tương ứng là

X1 = c2 – lamda2\* c1

X2= c2 – lamda1\*c1

**Bước 2:**

* Tính W1 bởi công thức (AT -λ1E)W1 = 0
* Ma trận A1 = A - X1W1T
* Làm lại quá trình trình trên để tìm đủ  với ma trận mới A1

Output: n vectơ riêng của ma trận A

**Chú thích1**: m được chọn như trên bởi ta quy ước

* Số nhỏ hơn 10-10 được coi là số 0
* Hai trị riêng có modun cách nhau không quá 10-10 được coi là 1 trị riêng

Để quá trình các tỉ số dạng (8) hội tụ thì số m nhỏ nhất để thỏa mãn sẽ cần thỏa mãn điều kiện sau :

 do ( )

*  < 10-10
* m > 

Do  > 

* m >  = 218

**Chú thích2 :**  Yêu cầu nhập lại Y bởi ta cần có C1 0. Nếu C1 = 0 thì A^m.Y = 0 ( do AmY =C1X1 )

Để có vectơ Y thỏa mãn thì các tích A^m.Y phải 0

**IV. Chương trình Matlab**

function E = power\_method(A, m, epsilon)

if A' ~= A

disp('ma tran A khong vuong');

return;

end;

E = []

n = size(A,1);

Y = ones(n,1)/100;

for i = 1:n,

Q = A^(m+1)\*Y./(A^m\*Y);

if abs(max(Q)-min(Q)) < epsilon,

E = [E max(Q)];

X = A^(m+1)\*Y/max(A^(m+1)\*Y);

else,

Q = A^(m+2)\*Y./(A^m\*Y);

if abs(max(Q)-min(Q)) < epsilon,

E = [E max(Q)];

X = (A^(2\*m)\*Y + max(Q)\*A^(2\*m-1)\*y)./ max((A^(2\*m)\*Y + max(Q)\*A^(2\*m-1)\*y));

else

c1 = (A^(m)\* Y); c2 = (A^(m + 1)\*Y) ; c3=(A^(m+2)\*Y);

a1=c1(1,1)\*c2(2,1)-c1(2,1)\*c2(1,1);

a2=c1(2,1)\*c3(1,1)-c1(1,1)\*c3(2,1);

a3=c2(1,1)\*c3(2,1)-c2(2,1)\*c3(1,1);

r = roots([a1 a2 a3]);

E = [E r(1)]

X = c2 - r(1)\*c1;

end;

end;

I = eye(n);

O = I;

[r,c] = max(X);

X = X/max(X);

O(1:n, c) = O(1:n, c) - X;

A = O\*A;

end;

end

Ví dụ 1 :

>> A=[2 3 2;4 3 5;3 2 9];

m= 220;

epsilon=0.0001;

power\_method(A, m, epsilon)

ans =

11.8354 3.0293 -0.8646

Ba trị riêng lần lượt là : ( 11.8354 , 3.0293 , -0.8646 )

Ví dụ 2 :

>> A=[17 24 30 17;8 13 20 7;2 10 8 6;-23 -43 -54 -26];

>> m= 220;

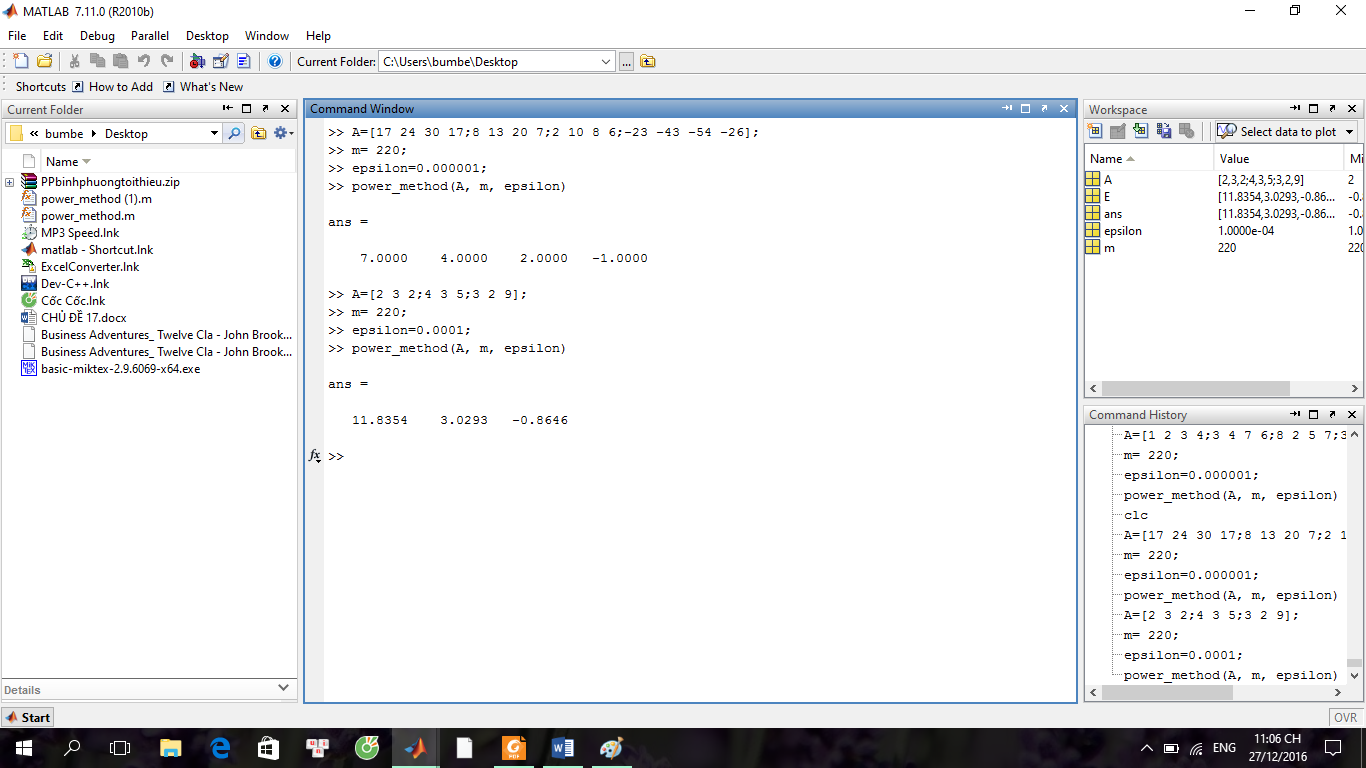
>> epsilon=0.000001;

>> power\_method(A, m, epsilon)

ans =

7.0000 4.0000 2.0000 -1.0000

Bốn trị riêng lần lượt là : (7 , 4 , 2 , 1)



**V. Kết luận**

Trên đây là phần tìm hiểu của bản thân em về chủ đề Tìm trị riêng gần đúng và xuống thang tìm trị riêng trội tiếp theo và chương trình Mathlab để giải quyết bài toán. Bản báo cáo chủ yếu được tham khảo từ Giáo trình Giải tích số của Lê Trọng Vinh và một số tài liệu của ĐHQG-HN . Để hoàn thành bản báo cáo này em xin gửi lời cảm ơn đến cô Hà Thị Ngọc Yến cùng các bạn sinh viên lớp KSTNTT-K60 đã giúp đỡ em trong suốt quá trình thực hiện.

Em xin chân thành cảm ơn !